Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 11.1 Die Differentialgleichung $y''(t) = -cy(t)$ mit $c > 0$ ist äquivalent zu folgendem System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & t \\ -ct & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{c}} & \frac{i}{\sqrt{c}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sqrt{c}t & 0 \\ 0 & -i\sqrt{c}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{c}} & \frac{i}{\sqrt{c}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{c}} & \frac{i}{\sqrt{c}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sqrt{c}t & 0 \\ 0 & -i\sqrt{c}t \end{pmatrix} \frac{i\sqrt{c}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\sqrt{c}} \\ -1 & -\frac{i}{\sqrt{c}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) = -\frac{2i}{\sqrt{c}} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -ct & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{c}} & \frac{i}{\sqrt{c}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{c}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{c}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\sqrt{c}} \\ -1 & -\frac{i}{\sqrt{c}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{c}}(e^{i\sqrt{c}t} + e^{-i\sqrt{c}t}) & \frac{1}{c}(e^{-i\sqrt{c}t} - e^{i\sqrt{c}t}) \\ e^{i\sqrt{c}t} - e^{-i\sqrt{c}t} & -\frac{i}{\sqrt{c}}(e^{i\sqrt{c}t} + e^{-i\sqrt{c}t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Fundamentalmatrix.
Man kann auch folgende übersichtlicheren Fundamentalmatrizen wählen

$$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{c}t} & e^{-i\sqrt{c}t} \\ i\sqrt{c}e^{i\sqrt{c}t} & -i\sqrt{c}e^{-i\sqrt{c}t} \end{pmatrix}$$

oder die relle Matrix

$$\Phi_3(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{c}t) & \sin(\sqrt{c}t) \\ -\sqrt{c}\sin(\sqrt{c}t) & \sqrt{c}\cos(\sqrt{c}t) \end{pmatrix}$$

welche man durch linear Kombinationen der beiden Spalten von Φ_1 erhält. Die Spalten der Matrizen sind verschiedene Basen für den selben Lösungsraum.
Nun ist also die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{i\sqrt{c}t} + \beta e^{-i\sqrt{c}t} \\ \alpha i\sqrt{c}e^{i\sqrt{c}t} - \beta i\sqrt{c}e^{-i\sqrt{c}t} \end{pmatrix}$$

und die der Differentialgleichung $y''(t) = -cy(t)$

$$y(t) = \alpha e^{i\sqrt{c}t} + \beta e^{-i\sqrt{c}t},$$

wobei α, β Konstanten sind.

Aufgabe 11.2 Die Lagrange Funktion lautet

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\gamma M m}{r}.$$

Die Euler-Lagrange Differentialgleichungen lautet nun

$$m\ddot{r} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial \dot{r}}L\Big)(t, r, \dot{r}) = \frac{\partial}{\partial r}L(t, r, \dot{r}) = -\frac{\gamma M m}{r^2}.$$

Für $m \neq 0$ erhält man nun die explizite Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2}.$$

Der Ausdruck $T(r,\dot r)+U((r,\dot r)$ ist eine Erhaltungsgröße, denn es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T(r,\dot r)+U((r,\dot r)) &= \frac{d}{dt}(\frac{m}{2}\dot r^2-\frac{\gamma Mm}{r})\\ &= m\ddot r\dot r+\dot r\frac{\gamma Mm}{r^2}\\ &= -\dot r\frac{\gamma Mm}{r^2}+\dot r\frac{\gamma Mm}{r^2}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 11.3 Berechne die Fluchtgeschwindigkeit der Masse m aus Aufgabe 11.2 in Abhängigkeit vom Abstand r.
Durch folgenden Trick kann die Differentialglichung $\ddot r=-\frac{\gamma M}{r^2}$ von Aufgabe 11.2 in eine Differentialgleichung 1. Ordnung transformieren.
Betrachte die Differentialgleichung $y''=f(y)$ und setze $z(x)=(y'(x))^2$. Nach der Kettenregel gilt

$$z'(x)=2y'(x)y''(x)=2y'(x)f(y(x))=2(F(y(x)))',$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Durch Integration folgt schließlich

$$z(x)=y'(x)^2=2F(y(x))+C,$$

wobei C eine Konstante ist.
Für $f(r)=-\frac{\gamma M}{r^2}$ ist $F(r)=\frac{\gamma M}{r}+C$ eine Stammfunktion und mit dieser erhält man nun die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot r^2=2\frac{\gamma M}{r}+\tilde C,$$

also die Geschwindigkeit zum Quadrat in Abhängigkeit des Abstands.
Alternativ kann man auch die Erhaltungsgröße $T+U$ nutzen und erhält dasselbe Ergebnis.

$$\begin{aligned}C=T+U&=\frac{m}{2}\dot r^2-\frac{\gamma Mm}{r}\\ \Leftrightarrow \dot r^2&=2\frac{\gamma M}{r}+\tilde C\end{aligned}$$

Seien nun $r(0)=R>0$ und $\dot r(0)=v_0\geq 0$ die Anfangswerte der Differentialgleichung $\ddot r=-\frac{\gamma M}{r^2}$, so gilt

$$\begin{aligned}v_0^2=\dot r(0)^2&=2\frac{\gamma M}{r(0)}+\tilde C=2\frac{\gamma M}{R}+\tilde C\\ \Leftrightarrow \tilde C&=v_0^2-\frac{2\gamma M}{R}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Es ist $\tilde C=\frac{2\cdot\Delta E}{m}$, wobei ΔE die Differenz der kinetischen und potentiellen Energie des Systems ist.

Betrachte nun folgende Fälle:

1. $\tilde C=\frac{2\cdot\Delta E}{m}<0$:
   Wenn die potentielle größer als die kinetische Energie ist, also $\tilde C<0$, so beschreibt

   $$\dot r=\begin{cases}\sqrt{2\frac{\gamma M}{r}+\tilde C} & ;\quad 2\frac{\gamma M}{r}\geq|\tilde C|\\ -\sqrt{-(2\frac{\gamma M}{r}+\tilde C)} & ;\quad \text{sonst}\end{cases}$$

   die Geschwindigkeit des Körpers m in Abhängigkeit des Abstands r. Der Abstand $r_U=-\frac{2\gamma M}{\tilde C}$ ist der Umkehrpunkt, d.h. die Geschwindigkeit ist 0 und ab da an bewegt sich die Masse m auf M zu. Der Schwung reicht also nicht aus.

2. $\tilde C=\frac{2\cdot\Delta E}{m}>0$:
   Hier ist die potentielle kleiner als die kinetische Energie, also $\tilde C>0$ und man erhält damit

   $$\dot r=\sqrt{2\frac{\gamma M}{r}+\tilde C}.$$

   Es gilt also $\dot r(t)\geq\sqrt{\tilde C}>0$, d.h. der Schwung ist ausreichend.

3. $\tilde{C} = \frac{2\cdot\Delta E}{m} = 0$:
   Bei gleich großen Energien, gilt

$$\dot{r} = \sqrt{2\frac{\gamma M}{r}}.$$

   Diese Differentialgleichung ist vom Typ 'Trennung der Variablen', so gilt

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(r^{\frac{3}{2}} - R^{\frac{3}{2}}) = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right|_R^r = \int_R^r \sqrt{u}\ du = \int_0^t \sqrt{2\gamma M}\ d\tau = t\sqrt{2\gamma M} \\ \Rightarrow r = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}t + R^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow \dot{r} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}t + R^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\sqrt{2\gamma M}.\end{aligned}$$

   Die Fluchtgeschwindigkeit lautet also $v_0 = \dot{r}(0) = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$.

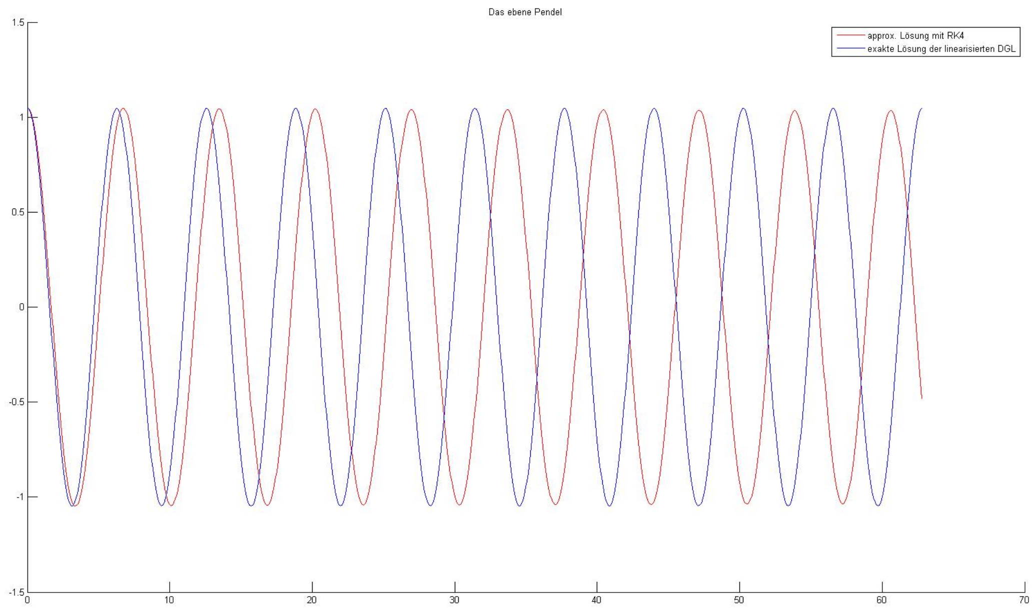
Aufgabe 11.4 Die Euler-Lagrange Differentialgleichung für ein ebenes Pendel lautet:

$$\phi''(t) = -\frac{g}{r}\sin(\phi(t))$$

Die linearisierte Differentialgleichung lautet:

$$\phi''(t) = -\frac{g}{r}\phi(t)$$

Für $g = r = 1$ und $\phi(0) = \frac{\pi}{3}, \phi'(0) = 0$ ist auf folgender Grafik die exakte Lösung der linearisierten $\phi(t) = \frac{\pi}{3}\cos(t)$ und eine Approximation mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta Verfahrens dargestellt.



Man erkennt, dass mit fortschreitender Zeit t die beiden Lösungskurven auseinanderlaufen. Dies liegt daran, dass der Sinus nur für 'kleine' Argumente von der Identität gut approximiert wird.